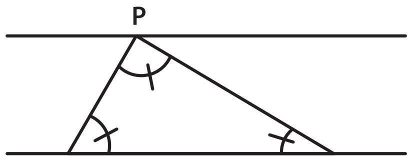
GEOMETRÍA NO EUCLÍDEA

En la confusión de propiedades relativas a los triángulos y paralelogramos, semejanza y congruencia, áreas y perímetros, se olvida a veces el carácter deductivo de la geometría. Muchas de esas propiedades fueron descubiertas por los egipcios y los antiguos babilonios a partir de rutinas prácticas de la agrimensura, el comercio y la arquitectura. Los griegos demostraron que todas podían deducirse a partir de unas pocas de ellas. Es fácil formular la idea fundamental. Se escogen algunas suposiciones geométricas "evidentes" que se llaman axiomas y a partir de ellas se deducen, con la única ayuda de la lógica, toda una serie de enunciados geométricos que se llaman teoremas. En su tratamiento del tema, Euclides escogió cinco axiomas (en realidad son diez, pero sólo cinco de ellos eran geométricos) y dedujo el bello y prestigioso cuerpo de teoremas que se conoce como geometría euclídea. (Véase la entrada acerca del Teorema de Pitágoras).

Uno de los cinco axiomas de Euclides es el conocido como postulado de las paralelas. Decía (y sigue diciendo) que por un punto exterior a una recta dada se puede trazar una recta paralela a la dada, y sólo una. Una conocida consecuencia del postulado de las paralelas es el teorema que dice que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°.

Como no parecía tan intuitivo como los otros cuatro axiomas, a lo largo de la historia los matemáticos han tratado esporádicamente de deducirlo a partir de ellos. Se inventaron todos los métodos que uno pueda imaginar pero nunca dieron con una demostración. Este fracaso, unido a la naturalidad de los otros axiomas, parecía conferir a la geometría euclídea un cierto carác-ter absoluto. A lo largo de un par de milenios reinó como un monumento al sentido común y la verdad eterna. Immanuel Kant llegó a decir incluso que la gente sólo podía pensar el espacio en términos euclídeos. Por fin, en el siglo XIX los matemáticos János Bolyai, Nicolai Lobachevski y Karl Friedrich Gauss se dieron cuenta de que el quinto postulado de Euclides es independiente de los otros cuatro y no se puede deducir de ellos. Es más, comprendieron que se puede sustituir el quinto postulado por su contrario y tener también un sistema geométrico consistente.



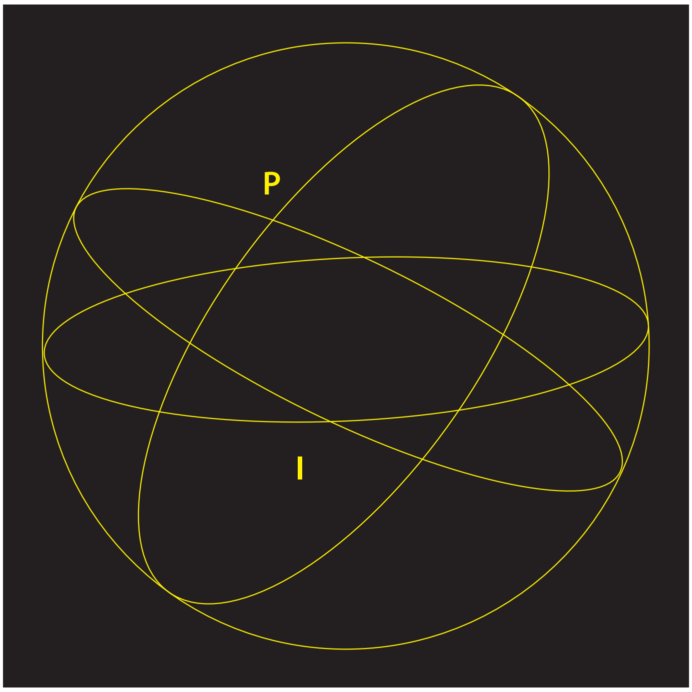
La suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Por P pasa una recta paralela a 1, y una sola.

RECOMENDACIONES:

- Este recurso podrá ser impreso o visualizado en dispositivos como: pizarra digital, computador, tableta o celular.
- Se sugiere realizar un organizador gráfico con la información presentada en la tarjeta pedagógica.
- Puedes realizar esta actividad en cooperación con otros compañeros y compañeras.
- Una vez realizada la actividad, conversar sobre ella con tus compañeros y compañeras.

Para ver esto, obsérvese que es perfectamente posible interpretar los términos fundamentales de la geometría de un modo completamente distinto sin salirse, no obstante, de los límites de la lógica más estricta. Exactamente igual que "todos los A son B y C es un A, luego C es un B" nos sirve de justificación para los argumentos más dispares, según sean las interpretaciones de A, B y C, también los términos de la geometría euclídea se pueden interpretar de un modo nada convencional sin dejar de llevarnos a teoremas válidos. Por ejemplo, en vez de las interpretaciones habituales podemos llamar "plano" a la superficie de una esfera, "punto" a un punto sobre una esfera y "línea recta" a los círculos máximos de la esfera (cualquier arco de circunferencia alrededor de la esfera que la divide en dos mitades). Si adoptamos estos significados, la "línea recta" sigue siendo el camino más corto entre dos puntos (sobre la superficie de la esfera) y tenemos una interpretación de la geometría que cumple todos los axiomas de Euclides excepto el postulado de las paralelas. También se cumplen todos los teoremas deducibles a partir de estos cuatro axiomas.

Comprobando los axiomas, observamos que por dos "puntos" cualesquiera pasa una "línea recta", pues dados dos puntos cualesquiera sobre la superficie de una esfera hay un círculo máximo que pasa por ellos. (Nótese que el círculo máximo que pasa por Los Ángeles y Jerusalén cruza por Groenlandia y es la distancia más corta entre ambas ciudades). Dado un "punto" y una distancia cualesquiera, hay un "círculo" sobre la superficie de la esfera con centro en ese punto y cuyo radio es esa distancia (que no es más que un círculo normal sobre la superficie de la esfera). Y también, dos "ángulos rectos" cualesquiera son iguales, y cualquier "segmento de recta" (un pedazo de círculo máximo) se puede prolongar indefinidamente.



No hay ninguna "línea recta" paralela a la "línea recta" 1 que pase por P. En esta interpretación se cumplen todos los demás axiomas de Euclides

RECOMENDACIONES:

- Este recurso podrá ser impreso o visualizado en dispositivos como: pizarra digital, computador, tableta o celular.
- Se sugiere realizar un organizador gráfico con la información presentada en la tarjeta pedagógica.
- Puedes realizar esta actividad en cooperación con otros compañeros y compañeras.
- Una vez realizada la actividad, conversar sobre ella con tus compañeros y compañeras.

Los "segmentos de recta" que unen Kenia, Ecuador y el Polo Norte forman un "triángulo" cuyos ángulos suman más de 180°

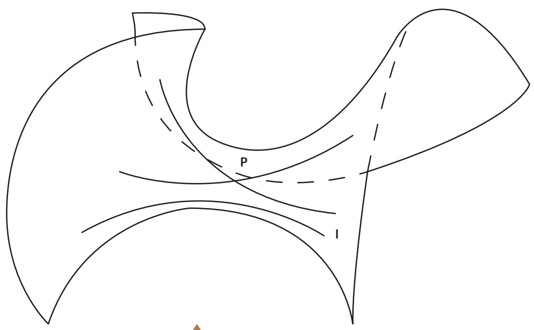
Sin embargo, el axioma de las paralelas no es válido en esta interpretación particular de los términos, pues dada una "línea recta" y un punto exterior a ella, no hay ninguna "línea recta" paralela a la dada que pase por dicho punto. A modo de ejemplo, tomemos el ecuador como la "línea recta" y la Casa Blanca en Washington como "punto" exterior a la misma. Cualquier "línea recta" que pase por la Casa Blanca será un círculo máximo que divida la Tierra en dos mitades y, por tanto, cortará necesariamente el ecuador, con lo que no podrá serle paralela. Otra anomalía de esta interpretación es que la suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que 180°. Para demostrarlo, podemos sumar los ángulos del "triángulo" formado por la parte del ecuador comprendida entre Kenia y Ecuador y los "segmentos de recta" que unen "puntos" de estos países con el Polo Norte. El triángulo esférico así formado tiene dos ángulos rectos en el ecuador.

Hay otras interpretaciones no estándar de los términos "punto", "recta" y "distancia" en los que son válidos los cuatro primeros axiomas de la geometría euclídea y el postulado de las paralelas es falso, aunque por otro motivo: por un punto exterior a una recta dada hay más de una paralela. En estos modelos (que podrían consistir, por ejemplo, en superficies en forma de silla de montar) la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180°. El matemático alemán Bernhard Riemann concibió superficies más generales todavía y geometrías en las que el concepto de distancia varía de un punto a otro de un modo parecido a como le ocurre a un viajero que se mueve por un terreno muy irregular y accidentado.

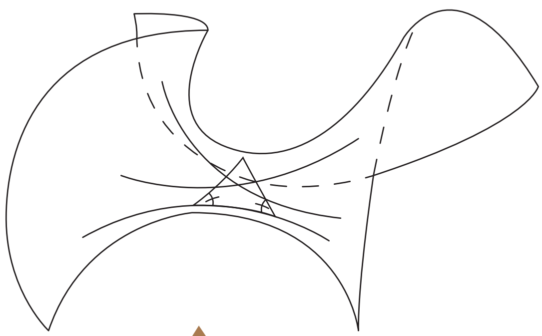
RECOMENDACIONES:

- Este recurso podrá ser impreso o visualizado en dispositivos como: pizarra digital, computador, tableta o celular.
- Se sugiere realizar un organizador gráfico con la información presentada en la tarjeta pedagógica.
- Puedes realizar esta actividad en cooperación con otros compañeros y compañeras.
- Una vez realizada la actividad, conversar sobre ella con tus compañeros y compañeras.

Cualquier modelo que, por la razón que sea, no cumpla el postulado de las paralelas se dice que es un modelo de geomería no euclídea. Cada una de las geometrías presentadas es un conjunto consistente de proposiciones (exacta-mente igual que las constituciones de distintas naciones son diferentes con-juntos de leyes consistentes entre sí). Cuál de ellas es la verdadera en el mun-do real es una cuestión que depende de qué significado físico demos a los términos “punto” y “recta”, y se trata de una cuestión empírica que se ha de dilucidar mediante la observación y no por proclamas de salón. Localmente al menos, el espacio parece tan euclídeo como un campo de maíz de Iowa, pero como ya han descubierto los partidarios de la tierra plana de cualquier parte del mundo, es peligroso extrapolar demasiado lejos la propia estrechez de miras. Si tomamos la trayectoria de un rayo de luz como interpretación de línea recta, obtenemos una geometría física no euclídea.



Si en esta superficie en forma de silla de montar interpretamos “línea recta” como la distancia más corta entre dos puntos, son válidos todos los axiomas de la geometría euclídea excepto el postulado de las paralelas. Por P pasa más de una paralela a 1



Los ángulos de un triángulo sobre esta superficie suman menos de 180°

Para terminar, me gusta pensar en el descubrimiento de la geometría no euclídea como una especie de chiste matemático -chiste que Kant no entendió-. Muchos acertijos y chistes son de la forma “¿Qué tiene esta propiedad, aquélla y la de más allá?”. Al oírlos, la respuesta que se le ocurre a uno inme-diatamente es completamente distinta de la interpretación inesperada de las condiciones que constituye la esencia del chiste. Así ocurre con la geometría no euclídea. En vez de “¿Qué es negro, blanco y rojo por todas partes?” tenemos “¿Qué cumple los primeros cuatro axiomas de Euclides?”. La nueva esencia de este chiste nos la dieron Bolyai, Lobachevski y Gauss: grandes humoristas del Club Universo.

RECOMENDACIONES:

- Este recurso podrá ser impreso o visualizado en dispositivos como: pizarra digital, computador, tableta o celular.
- Se sugiere realizar un organizador gráfico con la información presentada en la tarjeta pedagógica.
- Puedes realizar esta actividad en cooperación con otros compañeros y compañeras.
- Una vez realizada la actividad, conversar sobre ella con tus compañeros y compañeras.